Рабочая тетрадь № 4

|  |
| --- |
| Высказывание – это утверждение, которое может принимать два значения: истина, либо ложь.  Если высказывание A ложно, то будем записывать A = 0, иначе A = 1.  Математическая логика не касается вопросов ложности или истинности конкретных высказываний [1]. Здесь высказывания X, Y, Z –переменные, которые могут быть ложными или истинными.  Операции с переменными, принимающими такие значения, называются булевой алгеброй (алгеброй логики). |

|  |
| --- |
| **1. Теоретический материал** |
| Пусть A и B – высказывания. С этими высказываниями можно выполнять следующие основные логические операции:   * отрицание «НЕ»: ¬A * конъюнкция «И»: A&B * дизъюнкция «ИЛИ»: A˅B * импликация «следует»: A → B * эквивалентность: A ~ B.   Элементарные логические операции   |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |   Приоритет выполнения операций:  Сначала выполняются действия в скобках. Затем выполняется операция отрицания (), далее – конъюнкция (), дизъюнкция (), импликация () и в последнюю очередь – эквивалентность (). Однотипные операции выполняются в порядке следования.  Таблица истинности – это набор всевозможных комбинаций переменных с указанием значения логической формулы. Такая таблица, описывает логическую функцию. |

|  |  |
| --- | --- |
| **2. Пример** | |
| ***Задача:*** | |
|  | Приведите таблицу истинности для следующего выражения  BAB |
| ***Решение:*** | |
|  | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **A** | **B** |  | ***BA*** | **(*BA)*** | **(*BAB*** | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |  |  | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| ***Задача:*** | |
|  | Для какого из представленных вариантов символьных строк следующее высказывание является ложным:  (Первая буква гласная) → ¬(Третья буква согласная) ?  1) abedc; 2) babas; 3) becde; 4) abcab. |
| ***Решение:*** | |
|  | Логическое выражение является импликацией. Данная логическая функция ложна только в том случае, когда из истинной левой части высказывания следует ложная правая часть. Левая часть будет истинной для вариантов один и четыре. Правая часть является отрицанием высказывания «третья буква согласная» (что эквивалентно высказыванию«третья буква гласная»). При этом правая часть ложна для вариантов два, три и четыре. Следовательно, правильный вариант расположен под номером 4. |
| ***Ответ:*** | |
|  | 4 |
| ***Задача:*** | |
|  | Какое из представленных выражений равносильно следующему:  A ∨ ¬(¬B ∧ ¬C) ?  1) ¬A∨¬B∨¬C; 2) A ∧ ¬(B ∧ C);  3) A∨¬B∨¬C; 4) A ∨ B ∨ C. |
| ***Решение:*** | |
|  | Задействуем законы де Моргана. Раскрыв скобки запишем:  A ∨ ¬(¬B ∧ ¬C) = A ∨ (¬¬B ∨ ¬¬C).  Теперь применим закон двойного отрицания:  A ∨ (¬¬B ∨ ¬¬C) = A ∨ B ∨ C.  Следовательно, правильный вариант четвертый. |
| ***Ответ:*** | |
|  | 4 |
| ***Задача:*** | |
|  | По заданному фрагменту таблицы истинности для выражения F определить, какое из перечисленных ниже логических выражений ему соответствует [5].   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **X** | **Y** | **Z** | **F** | | 1 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 0 | 0 |   1) ¬X ∧ ¬Y ∧ Z; 2) X ∨ ¬Y ∨ ¬Z;  3) ¬X ∧ ¬Y ∧ Z; 4) ¬X ∨ ¬Y ∨ Z. |
| ***Решение:*** | |
|  | Подставим представленные значения X, Y и Z из таблицы во все варианты логических функций.  Для первого выражения получим:  ¬1 ∧ ¬0 ∧ 0 = 0 ∧ 1 ∧ 0 = 0;  ¬0 ∧ ¬0 ∧ 1 = 1 ∧ 1 ∧ 1 = 1;  ¬0 ∧ ¬1 ∧ 0 = 1 ∧ 0 ∧ 0 = 0.  Для второго выражения получим:  1 ∧ 0 ∧ ¬0 = 1 ∧ 0 ∧ 1 = 0;  0 ∧ 0 ∧ ¬1 = 0 ∧ 0 ∧ 0 = 0;  0 ∧ 1 ∧ ¬0 = 0 ∧ 1 ∧ 0 = 0.  Для третьего выражения получим:  1 ∨ ¬0 ∨ ¬0 = 1 ∨ 1 ∨ 1 = 1;  0 ∨ ¬0 ∨ ¬1 = 0 ∨ 1 ∨ 0 = 1;  0 ∨ ¬1 ∨ ¬0 = 0 ∨ 0 ∨ 1 = 1.  Для четвертого выражения получим:  ¬1 ∨ ¬0 ∨ 0 = 0 ∨ 1 ∨ 0 = 1;  ¬0 ∨ ¬0 ∨ 1 = 1 ∨ 1 ∨ 1 = 1;  ¬0 ∨ ¬1 ∨ 0 = 1 ∨ 0 ∨ 0 = 0.  Таким образом, сопоставив приходим к выводу, что правильный вариант под номером один. |
| ***Ответ:*** | |
|  | 1 |
| ***Задача:*** | |
|  | Найдите наименьшее целое число x> 0, при котором логическое выражение (4 > –(4 + x) x) → (30 > x ⋅ x) является ложным? |
| ***Решение:*** | |
|  | Импликация ложна только в случае, если левая часть выражения истинна, а правая ложна.  Рассмотрим левую часть. После преобразований можно записать квадратное неравенство x2 + 4x + 4 > 0 или (x + 2)2> 0. Поскольку x> 0, левая часть импликации истинна всегда. Выражение (30 > x⋅x) будет ложным для x > 5. ( 30 > 52, но 30 < 62). Следовательно наименьшее целое число x большее нуля, для которого высказывание ложно равно 6. |
| ***Ответ:*** | |
|  | 6 |
| ***Задача:*** | |
|  | Перед началом соревнований три зрителя высказали предположения по поводу победителей:   * Коля победит, Петя будет вторым; * Петя– третий, Ваня– первый; * Коля будет последним, а первым будет Женя.   Когда турнир окончился, оказалось, что каждый из зрителей был прав только в одном прогнозе из двух. Какое место на соревнованиях заняли Женя, Ваня, Петя и Коля? В ответе перечислите места участников в указанном порядке имен. |
| ***Решение:*** | |
|  | Обозначим буквами предсказания каждого зрителя [5].  Первый: A — Коля победит; B — Петя второй.  Второй: C — Петя третий; D — Ваня первый.  Третий: E — Коля последний; F — Женя первый.  Нетрудно заметить, что истинными одновременно не могут быть выражения B и C; A и E; A и D; A и F; D и F.  Поскольку из условия известно, что в каждом из прогнозов одно высказывание ложно, а другое истинно, то получаем следующее:   * A¬B ∨ ¬AB = 1; * C¬D ∨ ¬CD = 1; * E¬F ∨ ¬EF = 1.   Так как все условия должны быть истинными одновременно справедливо следующее выражение:  (A¬B ∨ ¬AB)(C¬D ∨ ¬CD)(E¬F ∨ ¬EF) = 1.  Раскроем скобки. Используя логические законы, рассмотренные ранее, получим:  A¬BC¬DE¬F ∨ ¬ABC¬DE¬F ∨ A¬B¬CDE¬F ∨  ∨ ¬AB¬CDE¬F ∨ A¬BC¬D¬EF ∨ ¬ABC¬D¬EF ∨  ∨ A¬B¬CD¬EF ∨ ¬AB¬CD¬EF = 1.  Учитывая, что BC = 0, AE = 0, AD = 0, AF = 0, DF = 0, получаем следующее:  ¬AB¬CDE¬F = 1.  Представленная конъюнкция равна единице, если все сомножители равны единице, следовательно:  A = 0; B = 1; C = 0; D = 1; E = 1; F = 0.  Вспоминая высказывания каждого из зрителей, получаем, что Петя — второй, Ваня — первый, Коля — последний, т. е. четвертый. Таким образом, Женя на третьем месте. Следовательно, правильный ответ — 3124. |

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ответ:*** | |
|  | 3124 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **3. Задания** | | |
| 1. | ***Задача:*** | |
|  | Составить таблицу истинности для выражений  1) AvBA~B  2) v(⊕B (⊕ – исключающее ИЛИ, сумма по модулю 2)  3) AvBC |
| ***Решение:*** | |
|  | 1)   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | A | B | AvB | (AvB)=>A | ((AvB)=>A)~B | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |   2)   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | A | B | Not A | B~A | Not B~A | Not A or not (B~A) | (Not A or not (B~A)) ИСКЛ B |  | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |  | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |  | | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |  | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |  |   3)   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | A | B | C | AvB | (AvB)=>C | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | |  |  |  |  |  | |
| 2. | ***Задача:*** | |
|  | Для какого слова истинно высказывание:  (Первая буква гласная ∨ Пятая буква согласная) → Вторая буква гласная?  1) арбуз; 3) кресло; 2) ответ; 4) привет. |
| ***Решение:*** | |
|  |  |
| ***Ответ:*** | |
|  | 4) привет |
| 3. | ***Задача:*** | |
|  | Выберете логическое выражение эквивалентное следующему:  ¬(¬A ∧ B) ∨ ¬C?  1) ¬A ∨ B ∨ ¬C; 2) A ∨ ¬B ∨ ¬C;  3) ¬A ∨ ¬B ∨ ¬C; 4) A ∨ B ∨ ¬C. |
| ***Решение:*** | |
|  |  |
| ***Ответ:*** | |
|  | 2) A ∨ ¬B ∨ ¬C; |
| 4. | ***Задача:*** | |
|  | По заданному фрагменту таблицы истинности для выражения F определить какое из перечисленных ниже логических выражений ему соответствует.   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **X** | **Y** | **Z** | **F** | | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 0 | 1 |   1) X ∧ Y ∧ Z; 2) X ∧ Y ∨ Z;  3) ¬X ∨ Y ∨ ¬Z; 4) X ∨ Y ∧ ¬Z. |
| ***Решение:*** | |
|  |  |
| ***Ответ:*** | |
|  | 4) X ∨ Y ∧ ¬Z. |
| 5. | ***Задача:*** | |
|  | Найдите наибольшее целое число x> 0, для которого ложно выражение:  ((x + 6) ⋅ x + 9 > 0) → (x ⋅ x > 20) . |
| ***Решение:*** | |
|  | Левая часть = 1, правая = 0.  Для правой части, если х=5: 5\*5>20 ( 1 )  Если х=4, 4\*4>20 ( 0 )  10\*4+9>0 ( 1 ) |
| ***Ответ:*** | |
|  | 4 |
| 6. | ***Задача:*** | |
|  | Найдите значения логических переменных A, B, C, D, при которых логическое выражение (¬(C∨B) ∧A) → ((¬A∧ ¬C) ∨D) = 0. |
| ***Решение:*** | |
|  |  |
| ***Ответ:*** | |
|  | ABCD  1 0 0 0 |
| 7. | ***Задача:*** | |
|  | В соревновании участвовало пять человек: Аня, Надя, Вера, Рита, Саша. Об итогах турнира есть пять высказываний:  1. Первое место заняла Аня, а Рита – третья.  2. Пятая Вера, а вот Надя первая.  3. Первая Саша, а Вера– вторая.  4. Рита пятая, а Надя была четвертой.  5. Надя была четвертой, а первой — Аня.  Известно, что в каждом утверждении только одно утверждение из двух истинно. Требуется найти, кто занял первое место, и на каком месте была Аня? Ответ следует записать в виде первой буквы имени победительницы, и, через запятую, места, занятого Анной. |
| ***Решение:*** | |
|  | Р-3  В-5  С-1  Н-4  Н-4   * А-2 |
| ***Ответ:*** | |
|  | С, 2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Тест 4** | | |
| **1.** | ***Задание:*** | |
|  | Таблица, включающая всевозможные значения логической функции, называется: |
| ***Ответ: 2*** | |
|  | **2) таблица истинности;** |
| **2.** | ***Задание:*** | |
|  | Значение логического выражения ¬(А٧В) по закону Моргана равно: |
| ***Ответ: 1*** | |
|  | **1) ¬А&¬В;** 2) ¬А&В; 3) А&¬В; 4) ¬А٧¬В. |
| **3.** | ***Задание:*** | |
|  | Какое из перечисленных имен удовлетворяет истинности высказывания:  ¬ (Первая буква согласная → Третья буква гласная) ? |
| ***Ответ: 2*** | |
|  | 1) Ирина; **2) Сергей;** 3) Григорий; 4) Ольга. |
| **4.** | ***Задание:*** | |
|  | Выберете выражение эквивалентное следующему:  ¬A ∨ ¬(B ∧ C)? |
| ***Ответ: 1*** | |
|  | **1) ¬A ∨ ¬B ∨ ¬C;**  2) ¬A ∧ B ∧ C;  3) A ∧ ¬B ∧ C; 4) (¬A ∨ B) ∧ C. |
| **5.** | ***Задание:*** | |
|  | По заданному фрагменту таблицы истинности для выражения F определить какое из перечисленных ниже логических выражений ему соответствует.   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | **X** | **Y** | **Z** | **F** | | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 1 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| ***Ответ: 4*** | |
|  | 1) ¬X ∨ ¬Y ∨ ¬Z; 2) X ∧ Y ∧ Z;  3) X ∧ ¬Y ∧ ¬Z; **4) X ∨ Y ∨ Z.** |
| **6.** | ***Задание:*** | |
|  | Для какого из приведенных значений x выражение (x > 2)∨(x > 5)→(x < 3) истинно. |
| ***Ответ: 4*** | |
|  | 1) 5; 2) 3; 3) 4; **4) 2.** |
| **7.** | ***Задание:*** | |
|  | Для какого из приведенных значений x выражение  ¬((x > 2) → (x > 3)) = 1 . |
| ***Ответ: 3*** | |
|  | 1) 1; 2) 2; **3) 3;** 4) 4. |
| **8.** | ***Задание:*** | |
|  | Сколько разнообразных решений имеет выражение  A∧ ¬B∧C∧ ¬D∧ (E∨ ¬E) = 0 ,  A, B, C, D, T — логические переменные?  В качестве ответа требуется написать количество таких наборов. |
| ***Ответ:*** | |
|  |  |
| **9.** | ***Задание:*** | |
|  | Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание  (100 < X ⋅ X) → (100 > (X + 1)(X + 1)) ? |
| ***Ответ:*** | |
|  | 10 |
| **10.** | ***Задание:*** | |
|  | Четыре друга — Антон, Михаил, Николай и Виктор пришли в автосалон. Продавец сказал, что осталось только четыре машины: красная, черная, белая и синяя. Каждый из друзей купил по машине. Имеется три утверждения:   * Красную машину купил Антон, а черную– Михаил; * Антон взял черный автомобиль, а Виктор – белый; * Николай забрал черное авто, а Виктор — синее.   Кто купил синюю машину, и какой автомобиль выбрал Виктор? Известно, что половина каждого утверждения ложна, а половина истинна.  Ответ требуется записать в виде первой буквы имени, взявшего синий автомобиль, и, через запятую, первую букву цвета машины Виктора. |
| ***Ответ:*** | |
|  | **М, О** |

Реализация задач на языке программирования Python

|  |
| --- |
| **1. Теоретический материал** |
| В Python существует возможность работы с двоичными разрядами (битами) целых величин. При этом каждый бит числа рассматривается отдельно. Для этого в Python задействованы битовые (поразрядные) операторы, которые реализуют битовые операции.  В побитовых операторах (операциях) операнды рассматриваются как последовательность бит (нулей или единиц). Над разрядами существует возможность выполнять известные логические операции (логическое «ИЛИ», логическое «И», и т.д.).  Битовые операции в Python в порядке убывания приоритета представлены ниже:   |  |  | | --- | --- | | **Операции** | **Назначение** | | **~** | побитовое НЕ (инверсия); | | **<<**,**>>** | битовые сдвиги влево и вправо; | | **&** | побитовое И; | | **^** | побитовое исключающее ИЛИ (XOR); | | **|** | побитовое ИЛИ (OR). |   В битовой инверсии значение любого бита числа меняется на противоположное. У числа при этом меняется знак со смещением на -1.  Операторы сдвига влево **<<** и сдвига вправо **>>** сдвигают биты на одну или несколько позиций влево или вправо соответственно.  Python. Работа операций сдвига влево << и сдвига вправо >>  Битовый оператор И (AND) есть бинарным и выполняет побитовое «И» для каждой пары битов операндов, которые размещаются слева и справа от знака оператора &.  Python. Битовый оператор & "И"  Битовый оператор «исключительное ИЛИ» обозначается ^ и выполняет операцию сложения по модулю 2 для любого бита операндов.  Python. Битовый оператор "исключающее ИЛИ" (XOR)  Битовый оператор ИЛИ (OR) символом |. Оператор реализует побитовое логическое сложение.  Python. Битовый оператор ИЛИ |

|  |  |
| --- | --- |
| **2. Пример** | |
| ***Задача:*** | |
|  | Дано число x = 37, y = 58.  Найти ~x, x>>3, x<<2, x&y, x^y, x|y |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  | x, y = 37, 58  #x в десятичной и двоичной системе  print('x = ', x, ' x\_bin = ', bin(x))  #y в десятичной и двоичной системе  print('y = ', y, ' y\_bin = ', bin(y))  #~x в десятичной и двоичной системе  a = ~x  print('~x =', a, ' ~x\_bin = ', bin(a))  #x>>3 в десятичной и двоичной системе  b = x >> 3  print('x>>3 =', b, ' (x>>3)\_bin = ', bin(b))  #x<<2 в десятичной и двоичной системе  c = x << 2  print('x<<2 =', c, ' (x<<2)\_bin = ', bin(c))  #x&y в десятичной и двоичной системе  d = x & y  print('x&y =', d, ' (x&y)\_bin = ', bin(d))  #x^y в десятичной и двоичной системе  e = x ^ y  print('x^y =', e, ' (x^y)\_bin = ', bin(e))  #x|y в десятичной и двоичной системе  f = x | y  print('x|y =', f, ' (x|y)\_bin = ', bin(f)) |
| ***Задача:*** | |
|  | Вытянуть из числа 4,5,6 биты и определить их целочисленное значение. |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  | number = int(input('Input number: '))  # фильтр на 4,5,6 биты  number &= 0b1110000  # сдвинуть на 4 разряда вправо  number >>= 4  print('number = ', number) |
| ***Задача:*** | |
|  | Умножить значения двух чисел. В первом числе взять биты, которые размещенные в позициях 0-5. Во втором числе взять биты, которые размещены в позициях 0-7. |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  | x = int(input('x = '))  y = int(input('y = '))  # фильтр на 0-5 биты  x &= 0b11111  # фильтр на 0-7 биты  y &= 0b1111111  # умножить  z = x\*y  print('x = ', x)  print('y = ', y)  print('z = ', z) |

|  |  |
| --- | --- |
| **3. Задания** | |
| ***Задача:*** | |
|  | Даны два различных числа *k* и *n*. Выведите значение 2*k*+ 2*n*, используя только битовые операции. |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  |  |
| ***Задача:*** | |
|  | Ввести число *n > 0* с клавиатуры. Если число *n* является точной степенью двойки, вывести “YES”, в противном случае “NO”. |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  |  |
| ***Задача:*** | |
|  | Даны целые числа *a* и *k*. Выведите число, которое получается из *а* установкой значения *k*-го бита в 1. |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  |  |
| ***Задача\*:*** | |
|  | Дано целые числа *n* и *k*. Обнулите в числе *n* его последние *k* бит и выведите результат. Рекомендуется сделать эту задачу без использования циклов. |
| ***Решение (код программы):*** | |
|  |  |